Projets

https://ailab.r2.enst.fr/FCI

Partie “Validation”
Description projet
- Attentes
- Rendu

Les projets sont par 2
La liste “past projects” c’est pour vous donner des idées

IA 101

Chapitre 3
Complexité et mathématiques

Contenu

- Chapitre 1 : définition formelle
- Chapitre 2 : différentes façons d’approximer/d’estimer la complexité en pratique
- Chapitre 3 : étude de l’objet formel. 4 théorèmes sur la complexité (le 3e va vous surprendre)

C n’est pas calculable

- Par l’absurde, soit *f* calculant la complexité.

```
def more_complex(n):
    i = 1
    while True:
        s = bin(i)[2:] # encodage binaire de i
        if f(s) > n:
            return s
        i += 1
```

- `more_complex` termine toujours

C n'est pas calculable

```
def more_complex(n):
    i = 1
    while True:
        s = bin(i)[2:] # encodage binaire de i
        if f(s) > n:
            return s
        i += 1
```

`more_complex` termine donc peut générer *s* avec *n* → $C(s) \leq C(\texttt{more\_complex}) + C(n)$

définition de *s* : $C(s) \geq n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq C(\texttt{more\_complex}) + C(n)$ mais $C(n) \sim \log(n)$

C n’est pas calculable

- ...mais peut quand même servir pour définir d’autres objets mathématiques et d’autres concepts

Probabilité algorithmique

- Quelle est la suite de 1223334444 … ?
- p(1 22 333 4444 55555)?
- p(1 22 333 4444 55055)?
- Les programmes qui génèrent 55055 sont plus longs que ceux qui génèrent 55555

Probabilité algorithmique

- Quelle est la suite de 1223334444 … ?
- p(1 22 333 4444 55555)?
- p(1 22 333 4444 55055)?
- Les programmes qui génèrent 55055 sont plus longs que ceux qui génèrent 55555
- $p(s) = 2^{-C(s)}$?

Tirage d’entiers

- Soit l’encodage binaire d’entiers
- Ça converge pas

Probabilité algorithmique

- $p_U(s) = \sum_{U(p)=s} 2^{-|p|}$?

- Problème : ça ne converge pas car on peut rallonger arbitrairement les programmes qui génèrent *s*
- Vous vous souvenez de Huffman vs Shannon ?
- $p_U(s) = \sum_{U(p)=s} 2^{-|p|}$ avec *U* machine de Turing préfixée

Programme normal → préfixé

- On double chaque bit sauf le dernier
- On indique le dernier bit par “01” ou “10”
  - 011100 → 001111110001
  - 0111 → 00111110
- Toute machine de Turing ordinaire peut être transformée en machine de Turing préfixée

Tirage d’entiers

- Soit l’encodage binaire préfixé d’entiers
- Ça converge

Probabilité algorithmique

- $p_U(s) = \sum_{U(p)=s} 2^{-|p|}$ avec *U* machine de Turing préfixée
- Pourquoi cette somme est bien définie ? / Pourquoi ça converge ?
- Souvenez-vous de l'arbre de Huffman
- Ou alors, les intervalles $[0.p, 0.p + 2^{-|p|}]$

Complexité préfixe

$$K_M(x) = \min_p \{l(p) \mid M(p) = x\}$$

avec *M* machine de Turing préfixée

A partir de maintenant:

- *C* = complexité ordinaire / plain complexity
- *K* = complexité préfixée / prefix complexity

Sur internet les gens écrivent l'un ou l'autre

Chain rule revisitée

Complexité ordinaire

Séparateur entre programmes

$$C(x) \leq C(y) + C(x|y) + O(\log(C(y)))$$

Longueur p_y

p_y

p_{x|y}

$$C(x,y) \leq C(y) + C(x|y) + O(\log(\min(C(x), C(y))))$$

Longueur p_x

p_x

p_{y|x}

Chain rule revisitée

$$K(x) \leq K(y) + K(x|y) + O(1)$$

$$K(x,y) \leq K(x) + K(y|x) + O(1)$$

$$K(x,y) = K(x) + K(y|x) + O(\log(K(x,y)))$$

$$K(x,y) = K(x) + K(y|p(x)) + O(1)$$

Plus court programme générant *x*

Complexité et aléa

- Qu’est-ce que l’aléa ? Qu’est-ce qu’un nombre aléatoire ?
- Richard von Mises (1919): *une séquence binaire est aléatoire si toute sous-séquence extraite indépendamment du contenu apparait 50% du temps (à la limite)*
  Ca ne marche pas, cf la constante de Champernowne, déterministe mais a cette propriété

Complexité et aléa

- Qu’est-ce que l’aléa ? Qu’est-ce qu’un nombre aléatoire ?
- Emile Borel (1927) : soit une définition de l’aléatoire et soit *n* le plus petit nombre vérifiant cette définition → *n* n’est pas aléatoire
- Per Martin-Löf (1964) : cf TP

Complexité et aléa

- Qu'est-ce que l'aléa ? Qu'est-ce qu'un nombre aléatoire ?
- Kolmogorov (1965), Gregory Chaitin (1975) & Leonid Levin (1975) : une suite *x* est aléatoire si elle est peu compressible

$$\exists c, \forall m, K(x_m) > m - c$$

les *m* premiers symboles de *x*

Complexité et aléa

$$\exists c, \forall m, K(x_m) > m - c$$

- π est compressible ?
- Avec la complexité, l'aléatoire et les probabilités deviennent des objets informatiques/computationnels (au lieu de mathématiques)

Théorème de Gödel

- Kurt Gödel (1931) : *certaines propositions mathématiques ne peuvent être démontrées*. La preuve de cette assertion est longue. Très longue.
- Gregory Chaitin (1970) : *il existe* m_0 *tel que* $\forall m \geq m_0, \forall n,$ *l'assertion* $K(n) > m$ *est vraie mais n'est pas démontrable.*

Théorème de Gödel étendu

Soit S un système formel (par exemple l'arithmétique et ses axiomes de base)

S ne peut décrire des propositions de type $K(x) = n$ que si $K(S) + c > n$

"S ne peut pas créer plus d'information qu'il n'en contient déjà"

Théorème de Gödel

Preuve par contraposée

Soit m tel que $\exists n, K(n) \geq m$ est démontrable

Je peux trouver n en énumérant tous les théorèmes et en connaissant m : $K(n) \leq 2\log(m) + O(1)$

$$m \leq K(n) \leq 2\log(m) + O(1)$$

$$m \leq m_0$$

$\forall m, m > m_0 \Rightarrow \forall n, \boxed{K(n) \geq m}$ n'est pas démontrable

Ω de Chaitin

$$\Omega = \sum_{p:M(p)\text{halts}} 2^{-l(p)}$$

- Ω n’est pas calculable
- Ω peut être approximé par une suite calculable, mais impossible de borner l’erreur

Soit S un système formel, tel que les propositions “ω est un préfixe de Ω” soit vraient. Elle ne peut être prouvée que si l(ω) ≤ K(S) + c

Classes algorithmiques dans N

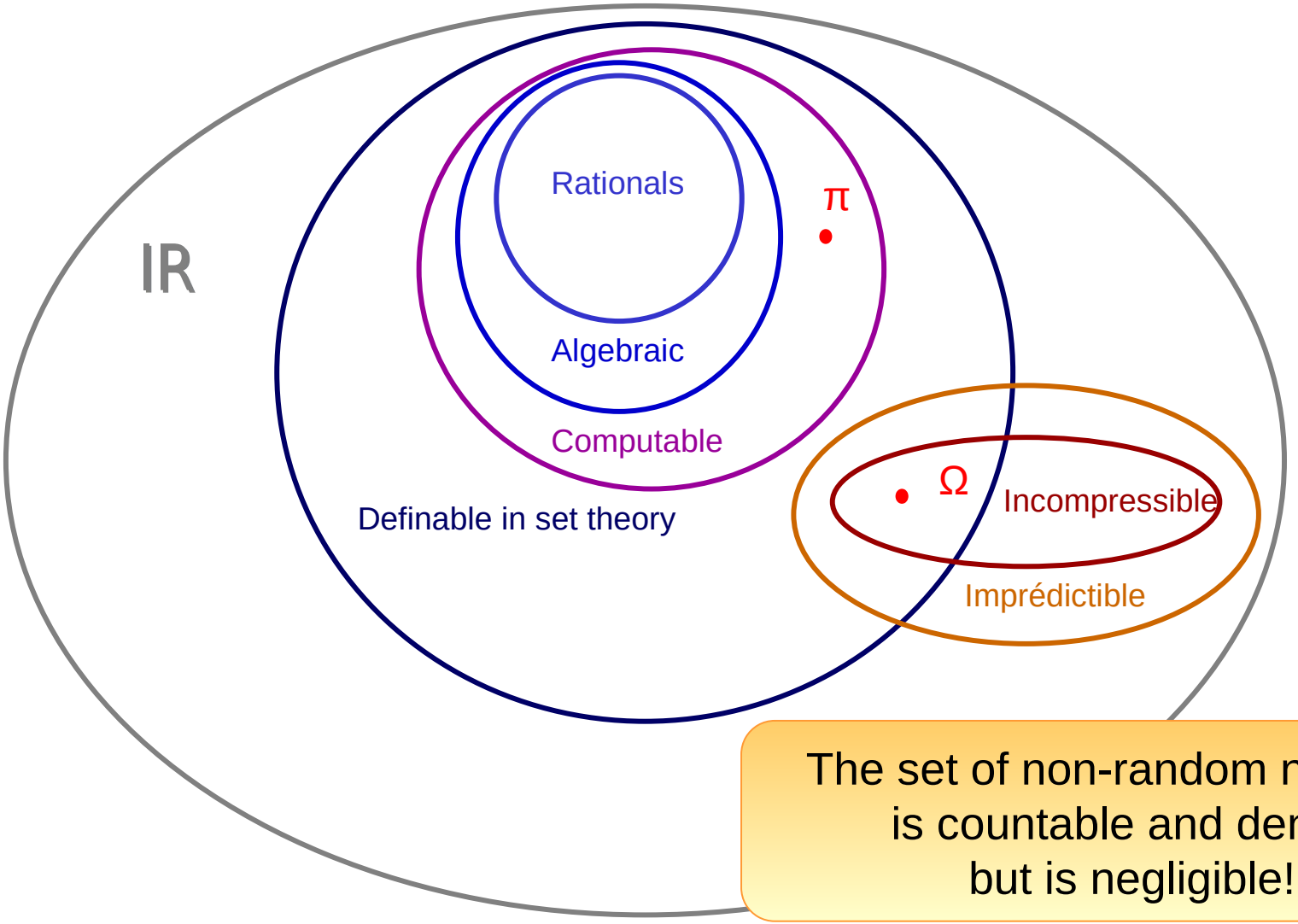
- Ensemble récursif ou décidable
  Il existe une machine de Turing permettant de déterminer en temps fini si *x* est dans *A*
- Ensemble récursivement énumérable
  Il existe un algorithme qui s'arrête si et seulement si l'entrée est dans A
- Ensemble approximable
  Fini ou contient un sous-ensemble r.e.
- Ensemble incompressible
  Soit S un système formel correct pour l'appartenance. S peut générer au plus K(S) + c membres de l'ensemble.

Classes algorithmiques dans N

- Ensemble récursif ou décidable
  Les nombres premiers
  L'ensemble des solutions de n+m=p
- Ensemble récursivement énumérable
  Les théorèmes de l'arithmétique de Peano
- Ensemble approximable
  L'ensemble des formules arithmétiques vraies
  Contre-exemple : les formules vraies "$C(s) = n$" (s séquence binaire finie)
- Ensemble incompressible
  Les chiffres de Ω.

Classes algorithmiques dans R

- Nombres rationnels
- Nombres algébriques
- Nombres transcendants
- Nombres normaux (fréquence limite b^{-k})
- Impredictibles (pas possible de gagner en pariant sur le prochain chiffre)
- Calculables
- Aléatoires ($\rightarrow$ incompressibles)



Information complexité et hasard de Jean-Paul Delahaye (Paris: *Hermès* 1999, ISBN 2-7462-0026-0) p. 94

Conclusion

- La complexité ne peut pas être calculée
- Mais elle permet de prouver ou de définir:
  - L’aléatoire
  - Les probabilités
  - Le théorème de Gödel